

# INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE CONTROL DISCRETOS

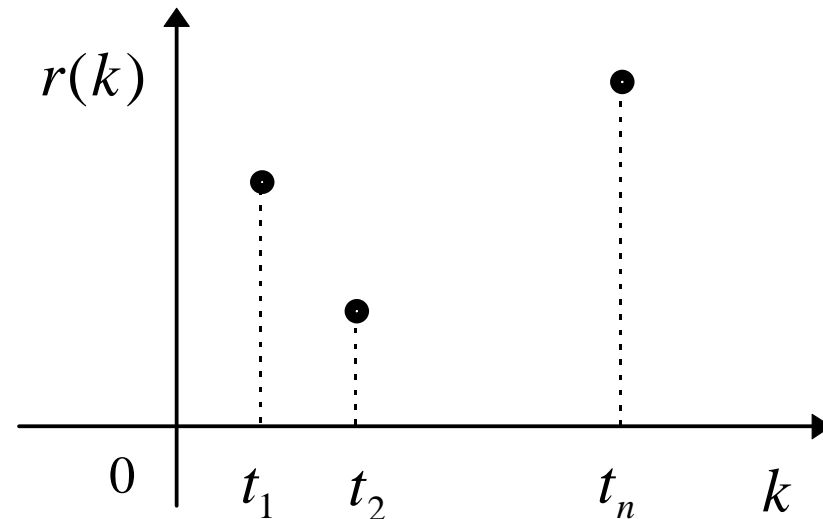
## Tema 1

# Indice

- Introducción al Control Discreto
- Ecuaciones en Diferencia
- Transformada en  $Z$
- Propiedades de la Transformada en  $Z$
- Transformada Inversa de  $Z$
- Función de Transferencia Discreta
- Representación en Espacio de Estado
- Matriz de Transferencia Discreta

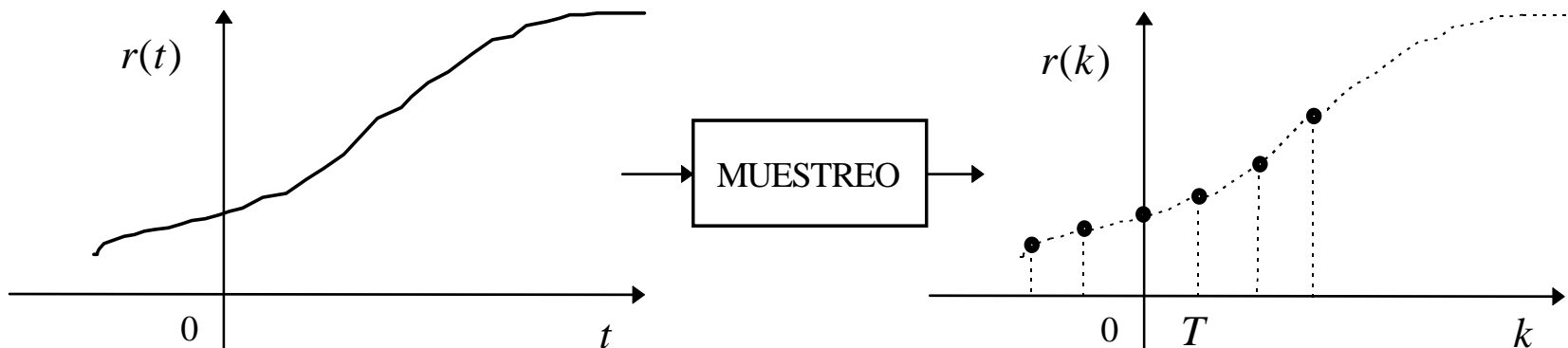
# Introducción al Control Discreto

- Un sistema en tiempo discreto viene caracterizado por magnitudes que varían solo en instantes específicos de tiempo.
- Estas magnitudes o señales en tiempo discreto  $r(k)$  toman valores  $r(t_1), r(t_2), \dots, r(t_n)$

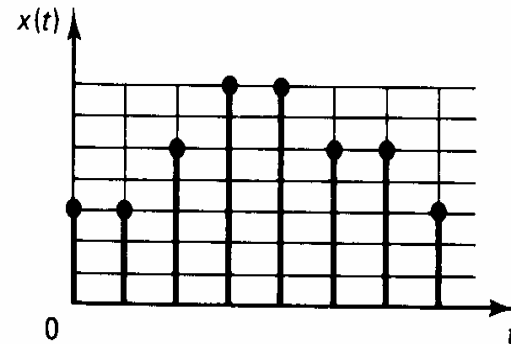
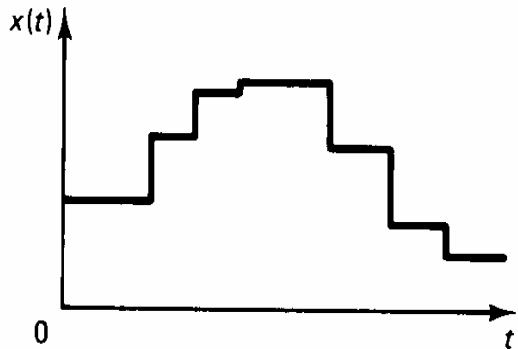
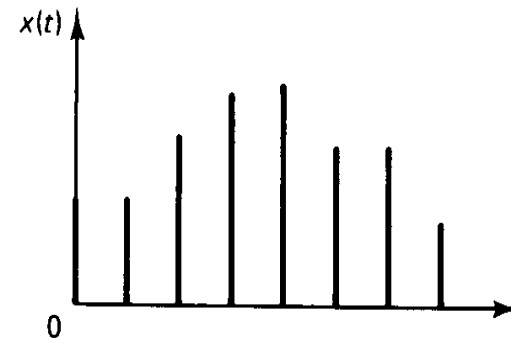
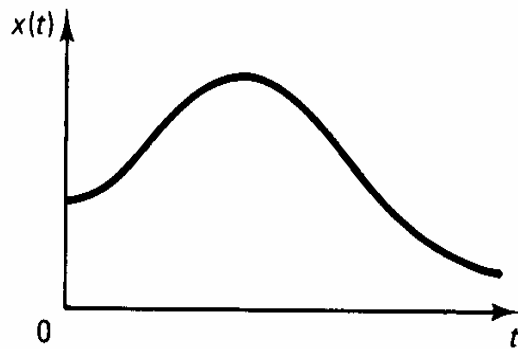


# Introducción al Control Discreto

- Además de los sistemas inherentemente discretos, se incluyen también en esta categoría los sistemas continuos muestreados con  $r(k)$  formada por  $r(T), r(2T), \dots, r(nT)$



# Introducción al Control Discreto



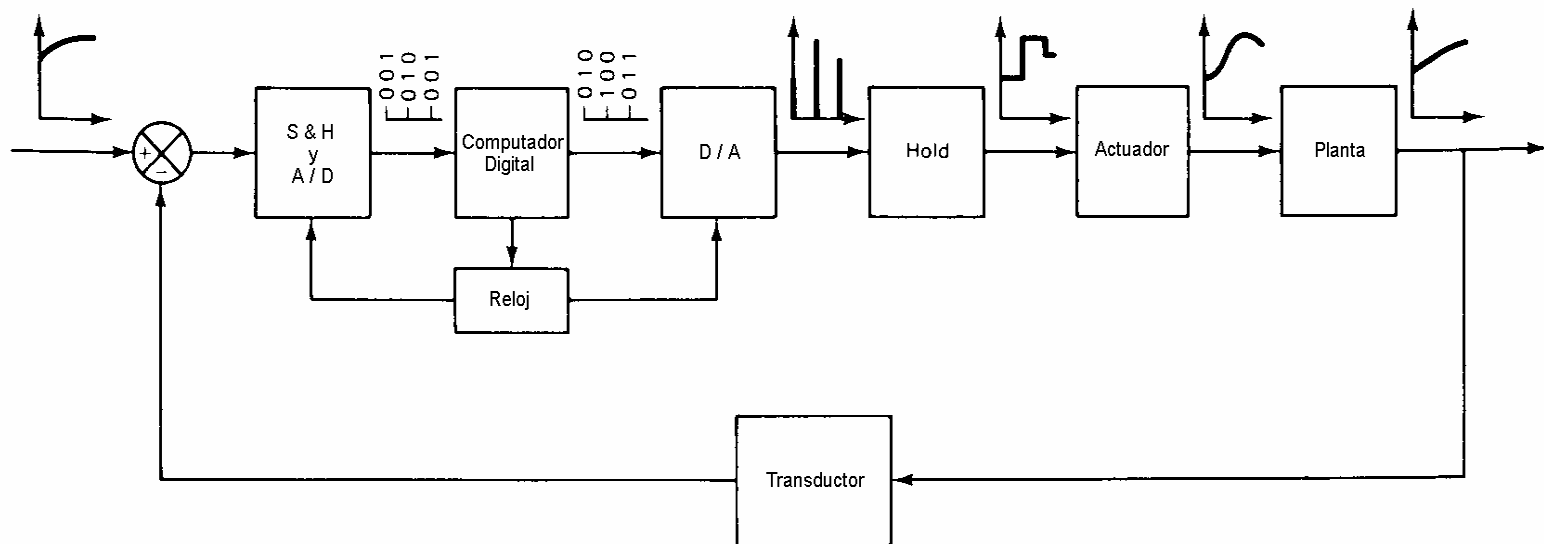
Señal continua y cuantificada  
continua

Señal discreta y cuantificada  
discreta

# Introducción al Control Discreto

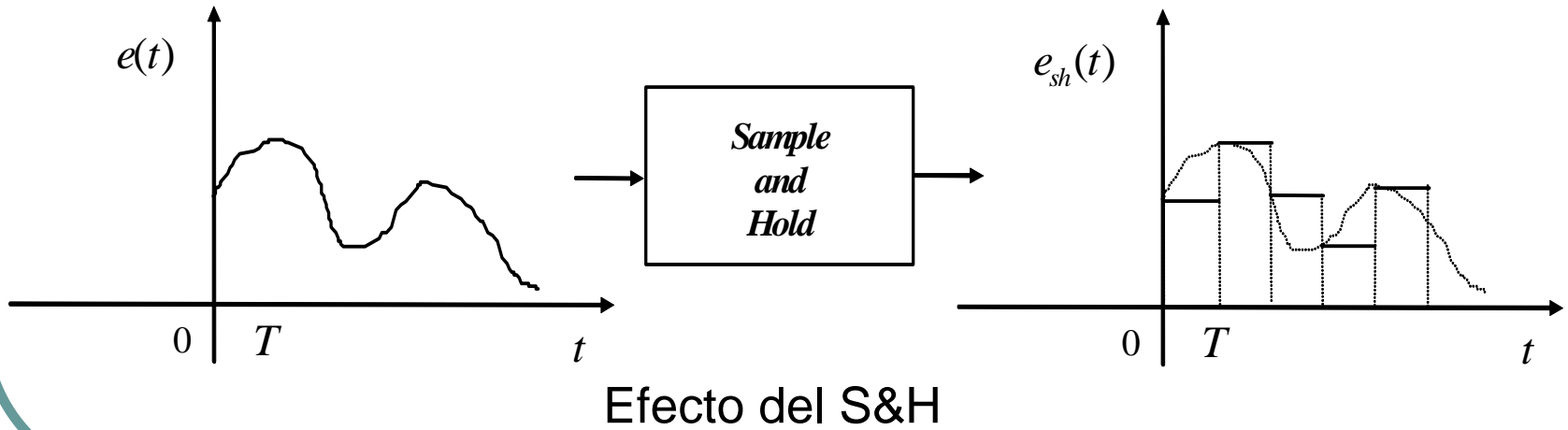
- **Sistema de Control Discreto**

Un sistema de control discreto es aquel que incluye un computador digital en el bucle de control para realizar un procesamiento de señal.



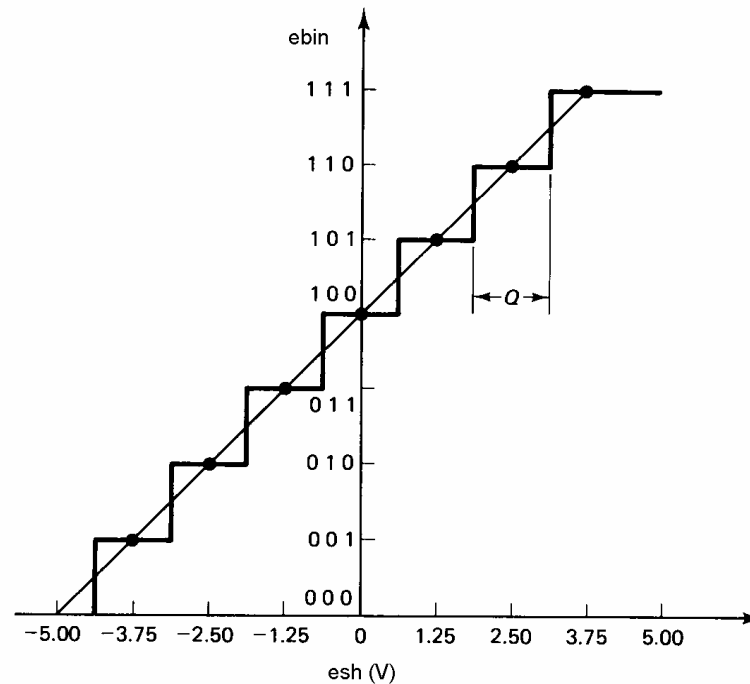
# Introducción al Control Discreto

- La salida de la planta es continua y es realimentada a través de un transductor que convierte la señal de salida en señal eléctrica.
- La señal de error continuo es convertida a señal digital a través del circuito de muestreo (periodo  $T$ ) y reconstrucción S&H (Sample and Hold) y del convertidor A/D, proceso llamado **codificación**



# Introducción al Control Discreto

- El convertidor A/D (encoder) convierte la señal continua en señal digital binaria, mediante un proceso de **cuantificación**





# Introducción al Control Discreto

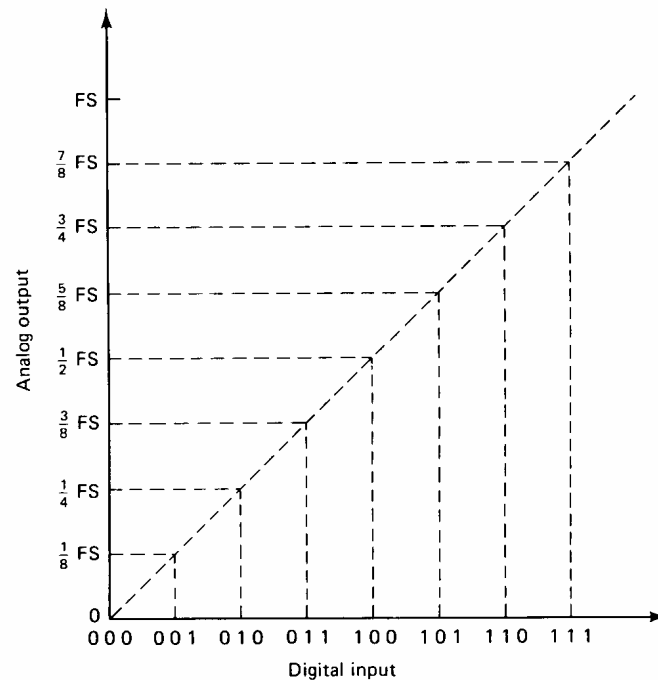
- El computador digital procesa la secuencia de valores de entrada digital a través de un algoritmo y produce una salida digital , según establezca la ley de control



- Esta señal de control habrá de ser transformada de nuevo a señal continua como entrada a la planta (acción de filtrado de la planta).

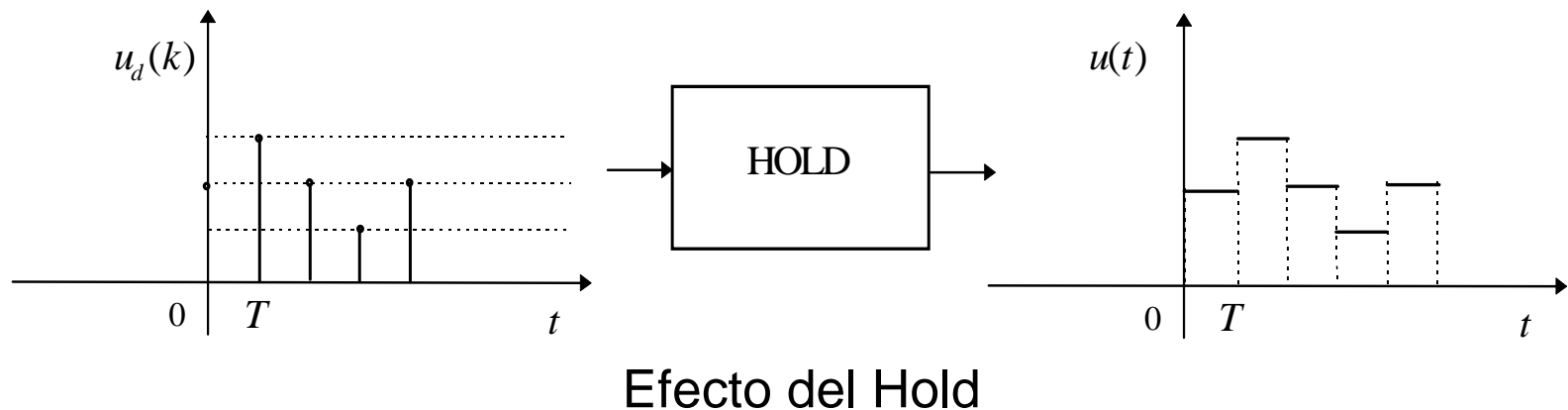
# Introducción al Control Discreto

- El convertidor D/A y el circuito de reconstrucción (Hold) convierten la secuencia de valores en una señal continua, proceso llamado **decodificación**



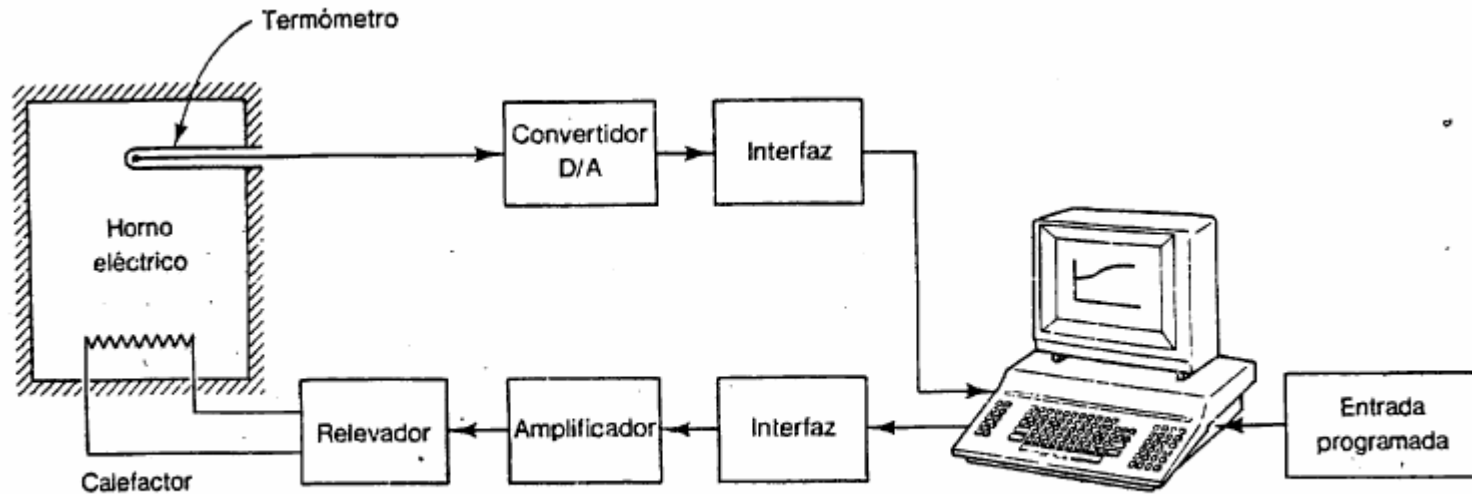
# Introducción al Control Discreto

- El circuito de reconstrucción (Hold) retiene el valor de salida del convertidor D/A justo un periodo  $T$ .



- El uso del control discreto presenta ventajas e inconvenientes frente al control analógico.
- Hay diversos campos de aplicación del control digital.

# Introducción al Control Discreto



# Introducción al Control Discreto

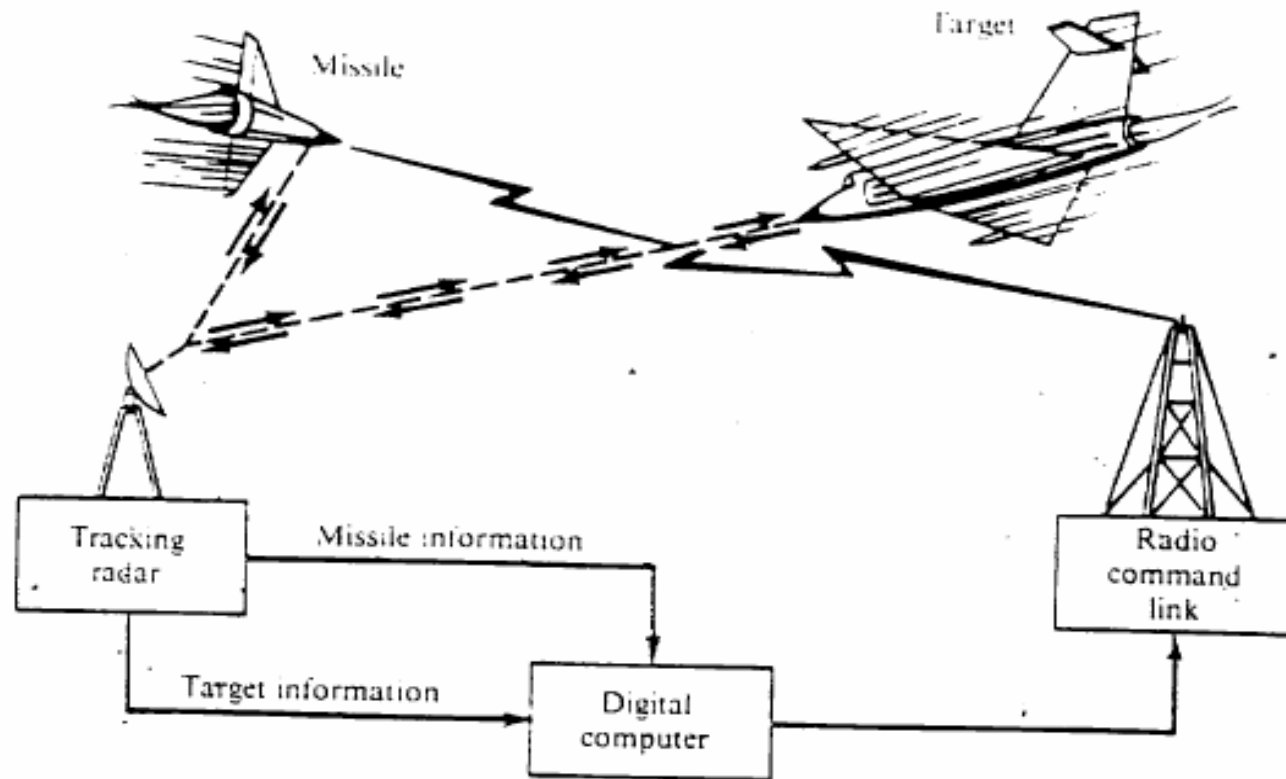
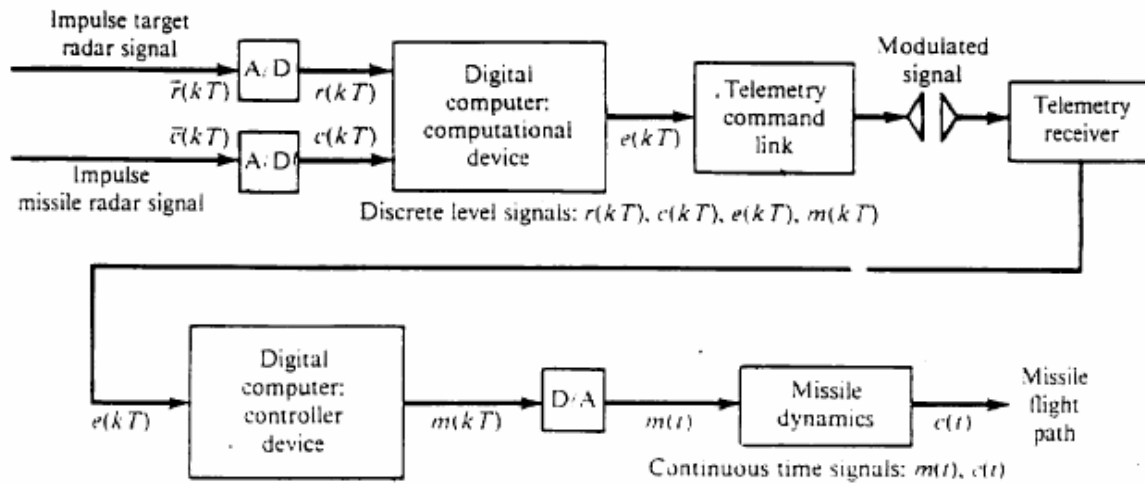
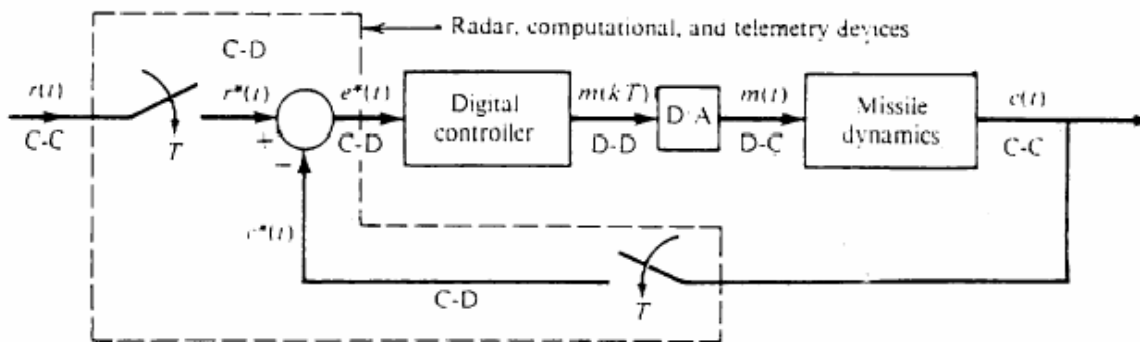


Figure 1-5 Command guidance interceptor system.

# Introducción al Control Discreto

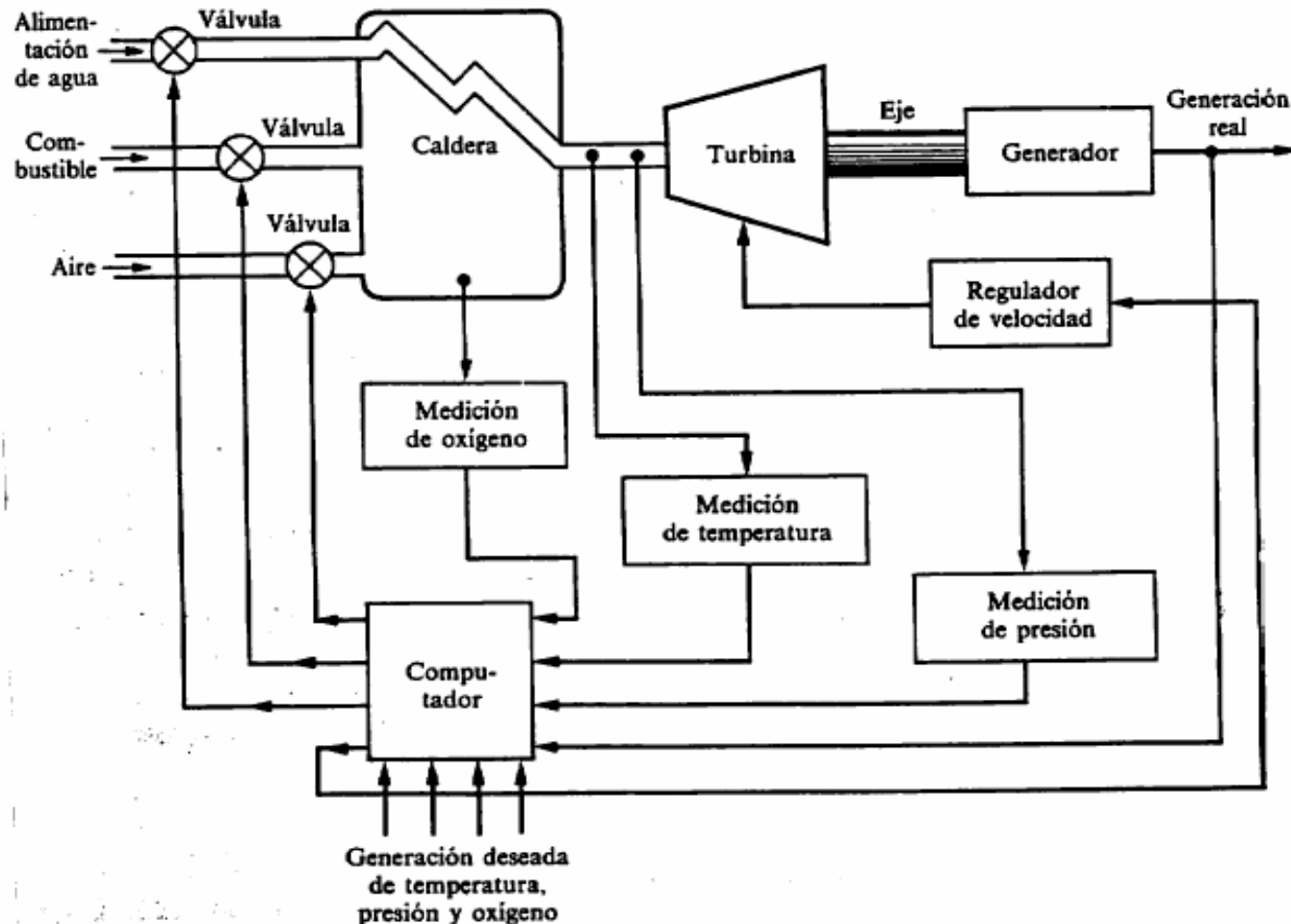


(a)



(b)

# Introducción al Control Discreto



# Ecuaciones en Diferencia

- La descripción de los sistemas en tiempo discreto viene definida por ecuaciones en diferencia, que relacionan la señal de salida  $y(k)$  con la señal de entrada  $u(k)$  .



$$u(kT) = u(k) = \{u(0), u(T), u(2T), \dots, u(kT), \dots\}$$

$$y(kT) = y(k) = \{y(0), y(T), y(2T), \dots, y(kT), \dots\}$$



# Ecuaciones en Diferencia

- Ecuación en diferencias del sistema, en general

$$f(y(k), y(k-1), \dots, y(k-n), u(k), u(k-1), \dots, u(k-n)) = 0$$

- Definiendo  $k - n = l$  entonces  $k = n + l$  y quedaría

$$f(y(l+n), y(l+n-1), \dots, y(l), u(l+n), u(l+n-1), \dots, u(l)) = 0$$

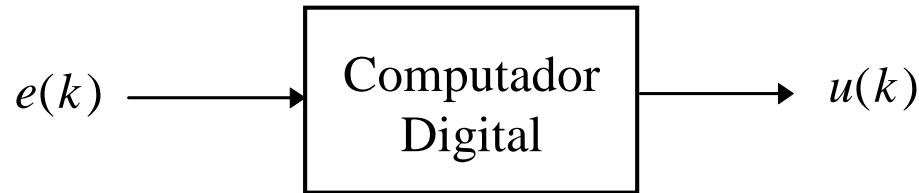
- Los sistemas en tiempo discreto lineales e invariantes en el tiempo (LTI), vendrán definidos por

$$a_n \cdot y(k+n) + \dots + a_1 \cdot y(k+1) + a_0 \cdot y(k) = b_n \cdot u(k+n) + \dots + b_0 \cdot u(k)$$

con  $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$  C.I.

# Ecuaciones en Diferencia

- El algoritmo de control del computador digital podrá ser expresado como una ecuación en diferencias



- Ejemplo: controlador PI discreto

$$u(kT) = k_p \cdot e(kT) + k_i \cdot x(kT)$$

$$x(kT) = x((k-1)T) + T \cdot e(kT)$$

# Ecuaciones en Diferencia

- A partir de la ecuación en diferencias, se pueden obtener los valores de salida dadas las condiciones iniciales y la entrada por simple **recurrencia**

$$y(k + n) = \frac{1}{a_n} \cdot (b_n \cdot u(k + n) + \dots + b_0 \cdot u(k) - a_{n-1} \cdot y(k + n - 1) - \dots - a_0 \cdot y(k))$$

- Se obtiene una expresión para calcular  $y(n)$ ,  $y(n + 1)$ , ... a partir de  $y(0)$ , ...,  $y(n - 1)$  y las condiciones iniciales.
- Este método no permite obtener el termino gral.  $y(k)$

# Transformada en Z

- La transformada en Z de una señal  $x(k)$ , con  $x(k) = 0$  para  $k < 0$

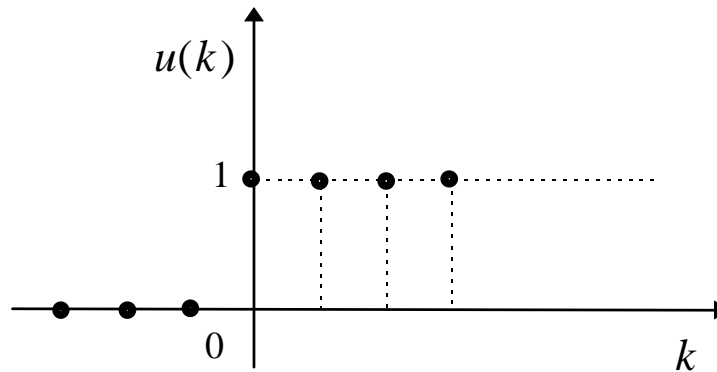
$$X(z) = Z\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k} \quad z \in \mathcal{C}$$

$$X(z) = x(0) + x(1) \cdot z^{-1} + x(2) \cdot z^{-2} + \dots$$

- La transformada en Z juega el mismo papel que la transformada de Laplace, pudiéndose describir una señal discreta  $x(k)$  por su transformada  $X(z)$ .

# Transformada en Z

## Transformada en Z de Señales



$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

# Propiedades de Transformada en Z

- Linealidad

$$Z\{a \cdot x(k) + b \cdot y(k)\} = a \cdot X(z) + b \cdot Y(z)$$

- Desplazamiento a la derecha

$$Z\{x(k - n)\} = z^{-n} \cdot X(z)$$

- Desplazamiento a la izquierda

$$Z\{x(k + n)\} = z^n \cdot \left[ X(z) - \sum_{l=0}^{n-1} x(l) \cdot z^{-l} \right]$$

# Propiedades de Transformada en Z

- Amortiguación

$$Z\{c^k \cdot x(k)\} = X\left(\frac{z}{c}\right) \quad c = e^{-aT}$$

- Multiplicación por  $k$

$$Z\{k \cdot x(k)\} = -z \cdot \frac{dX(z)}{dz}$$

- Teorema del Valor Final

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} ((1 - z^{-1}) \cdot X(z))$$

# Propiedades de Transformada en Z

$x(k)$	$X(z)$	$x(t)$	$X(s)$
$\delta(kT)$	1	$\delta(t)$	1
$u(kT)$	$\frac{z}{z-1}$	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$kT \cdot u(kT)$	$T \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$	$t \cdot u(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$c^k \cdot u(kT)$	$\frac{z}{z-c}$ , $c = e^{-aT}$	$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$kT \cdot c^k \cdot u(kT)$	$T \cdot \frac{c \cdot z}{(z-c)^2}$	$t \cdot e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\text{sen}(bkT) \cdot u(kT)$	$\frac{z \cdot \text{sen}(bT)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(bT) + 1}$	$\text{sen}(bt) \cdot u(t)$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
$\cos(bkT) \cdot u(kT)$	$\frac{z \cdot (z - \cos(bT))}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(bT) + 1}$	$\cos(bt) \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
$c^k \cdot \text{sen}(bkT) \cdot u(kT)$	$\frac{c \cdot z \cdot \text{sen}(bT)}{z^2 - 2 \cdot c \cdot z \cdot \cos(bT) + c^2}$	$e^{-at} \cdot \text{sen}(bt) \cdot u(t)$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$
$c^k \cdot \cos(bkT) \cdot u(kT)$	$\frac{z \cdot (z - c \cdot \cos(bT))}{z^2 - 2 \cdot c \cdot z \cdot \cos(bT) + c^2}$	$e^{-at} \cdot \cos(bt) \cdot u(t)$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2 + b^2}$

Tabla 1.1. Transformadas Z de Señales Discretas Frecuentes



# Transformada Inversa de Z

- La transformada  $Z^{-1}$  permite obtener una señal  $x(k)$  a partir de  $X(z)$ . Se procede a la descomposición en fracciones simples de  $\frac{X(z)}{z}$ , más que de  $X(z)$ .
- Se calculan los coeficientes  $k_{ij}$  de la descomposición en fracc. simples mediante el método de los residuos

$$\begin{aligned}\frac{X(z)}{z} = & \frac{k_{11}}{z + p_1} + \frac{k_{12}}{(z + p_1)^2} + \dots + \frac{k_{1r_1}}{(z + p_1)^{r_1}} + \\ & + \frac{k_{21}}{z + p_2} + \frac{k_{22}}{(z + p_2)^2} + \dots + \frac{k_{2r_2}}{(z + p_2)^{r_2}} + \dots\end{aligned}$$

# Transformada Inversa de Z

1. Para raíces  $p_k$  simples:

$$k_k = \left. \frac{X(z)}{z} \cdot (z + p_k) \right|_{z = -p_k} \quad k = 1, \dots, l$$

siendo  $l$  el número de raíces simples.

2. Para raíces  $p_k$  repetidas, de orden de multiplicidad  $r_j$ ,

$$k_{kj} = \frac{1}{(r_j - j)!} \cdot \lim_{z \rightarrow -p_k} \frac{d^{r_j-j}}{dz^{r_j-j}} \cdot \left( \frac{X(z)}{z} \cdot (z + p_k)^{r_j} \right)$$
$$k = 1, \dots, l \quad j = 1, \dots, r$$

# Transformada Inversa de Z

- Una vez determinados los coeficientes  $k_{ij}$ , se calculará utilizando las relaciones  $x(k) - X(z)$  de la tabla de transformadas Z, aplicadas a las fracciones simples obtenidas, tal que
- para raíces reales simples  $\frac{z}{z - c} \rightarrow c^k \cdot u(k)$
- para raíces reales múltiples  $\frac{Tcz}{(z - c)^2} \rightarrow kT \cdot c^k \cdot u(k)$

# Transformada Inversa de Z

- Existe un método más sencillo para obtener  $x(k)$  a partir de  $X(z)$ , mediante división directa, pues

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

grado  $N(z) \leq$  grado  $D(z)$

- Procediendo a la división directa, se obtendrá

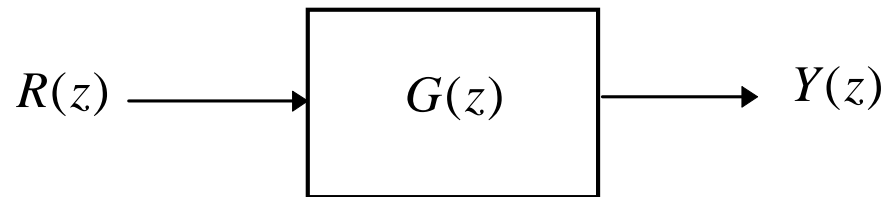
$$X(z) = c_0 + c_1 \cdot z^{-1} + c_2 \cdot z^{-2} + c_3 \cdot z^{-3} + \dots$$

$$x(k) = \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$$

# Función de Transferencia Discreta

- La función de transferencia de un sistema en tiempo discreto LTI es la relación entre la transformada en Z de la salida y la transformada en Z de la entrada con condiciones iniciales nulas,

$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$$



# Función de Transferencia Discreta

- Para un sistema LTI característico

$$\begin{aligned} a_n \cdot y(k+n) + a_{n-1} \cdot y(k+n-1) + \dots + a_1 \cdot y(k+1) + a_0 \cdot y(k) = \\ = b_m \cdot r(k+m) + \dots + b_1 \cdot r(k+1) + b_0 \cdot r(k) \end{aligned}$$

tomando la transformada en  $Z$ , y considerando condiciones iniciales nulas

$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{b_m \cdot z^m + \dots + b_1 \cdot z + b_0}{a_n \cdot z^n + \dots + a_1 \cdot z + a_0}$$

con  $m < n$ , en general.

# Función de Transferencia Discreta

- También es frecuente expresar  $G(z)$  en términos de  $z^{-1}$

$$G(z) = \frac{b_m \cdot z^{m-n} + \dots + b_1 \cdot z^{1-n} + b_0 \cdot z^{-n}}{a_n + \dots + a_1 \cdot z^{1-n} + a_0 \cdot z^{-n}}$$

- A partir de  $G(z)$  y la entrada  $R(z)$  es posible obtener la salida  $Y(z)$  según

$$Y(z) = G(z) \cdot R(z)$$

y aplicar  $Z^{-1}$  para obtener la sucesión de valores  $y(k)$

# Representación en Espacio de Estado

- Los métodos basados en el espacio de estado permiten el análisis y diseño de sistemas de control discreto que presentan múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO).
- El estado de un sistema es la menor colección de variables llamadas var. de estado  $x(k) = \{x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)\}$  tal que conocidas en  $kT = t_0$  junto con la entrada para  $kT \geq t_0$  determinan unívocamente la salida para  $kT \geq t_0$



# Representación en Espacio de Estado

- La dinámica del sistema multivariable (MIMO) será descrita a través de un sistema de ecuaciones en diferencia de primer orden en la forma

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

$$y(k) = g(x(k), u(k))$$

siendo  $f$  y  $g$  las funciones de transición y lectura del sistema.

- Los diferentes componentes del vector de estado forman el espacio de estado.

# Representación en Espacio de Estado

- En el estudio que se va a realizar a continuación se va a restringir al caso de sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI), en cuyo caso las funciones de transición y lectura toman la forma

$$x(k + 1) = G \cdot x(k) + H \cdot u(k)$$

$$y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k)$$

siendo  $G$ ,  $H$ ,  $C$  y  $D$  las matrices de representación en espacio de estado.

- Existen diferentes representaciones en espacio de estado según sea la elección del vector de estado.

# Representación en Espacio de Estado

- Considerando el sistema LTI descrito por la ecuación en diferencias

$$y(k + n) + a_1 \cdot y(k + n - 1) + \dots + a_n \cdot y(k) = b_0 \cdot u(k + n) + \dots + b_n \cdot u(k)$$

con función de transferencia

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 \cdot z^n + b_1 \cdot z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + \dots + a_n}$$

se van a ver dos formas de representacion en espacio de estado.

# Representación en Espacio de Estado

## 1. Forma Canónica de Control

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}}_G \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_H \cdot u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{[b_n - a_n b_0 \cdots b_1 - a_1 b_0]}_C \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \underbrace{b_0}_D \cdot u(k)$$

# Representación en Espacio de Estado

## 2. Forma Canónica de Observación

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}}_G \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}}_H \cdot u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_C \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \underbrace{b_0}_D \cdot u(k)$$

# Matriz de Transferencia Discreta

- Al igual que la función de transferencia describía la dinámica de un sistema SISO en tiempo discreto, es posible también definir la llamada matriz de transferencia para un sistema MIMO.
- Partiendo de un sistema con  $r$  entradas y  $m$  salidas, representado en espacio de estado por

$$x(k + 1) = G \cdot x(k) + H \cdot u(k)$$

$$y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k)$$

aplicando la  $Z$  se obtiene

# Matriz de Transferencia Discreta

$$z \cdot I \cdot X(z) - z \cdot x(0) = G \cdot X(z) + H \cdot U(z)$$

$$Y(z) = C \cdot X(z) + D \cdot U(z)$$

reorganizando

$$X(z) = (z \cdot I - G)^{-1} \cdot H \cdot U(z)$$

$$Y(z) = [C \cdot (z \cdot I - G)^{-1} \cdot H + D] \cdot U(z)$$

por tanto, la matriz de transferencia vendrá dada por

$$\overline{G}(z) = C \cdot (z \cdot I - G)^{-1} \cdot H + D$$